Nurjahdus ja nurjahdusta estävän rakenteen jäykkyys

DI Jari Hietala
Kehityspäällikkö
A-Insinöörit Suunnittelu Oy

A-INSINÖÖRIT

Esityksen sisältö

- Sauvan nurjahduspituus
  - Eulerin nurjahdustapaukset
  - Tuen jousto
  - Nojaavat pilarit
  - Laskentaesimerkki

- SFS-EN 1993-1-1 mukainen jäykistävien osien mitoitus
  - Teoreettinen tarkastelu jäykistävistä osan jäykkyydestä
  - Eurokoodin tarkastelu

Lähteitä

/1/ Galambos, T. V., Surovek, A. E., Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers. John Wiley & Sons, New Jersey 2008.

/2/ Kindmann, R. Stahlbau Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung. Ernst & Sohn 2008

/3/ Ballio G., Mazzolani F., Theory and Design of Steel Structures. 1983

Eulerin nurjahduskaavat

- Idealisauvan nurjahduskuorma saadaan lausekkeesta

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(Lc)^2}$$

- Ideaalisauvan nurjahduspituus Lc viereisen kuvan mukaan, jossa tuet niveliä tai jäykkiä, sivusuuntaan tuettuja tai vapaita.
- Tuen jousto sivusuunnassa tai kiertymässä tulee ottaa huomioon!

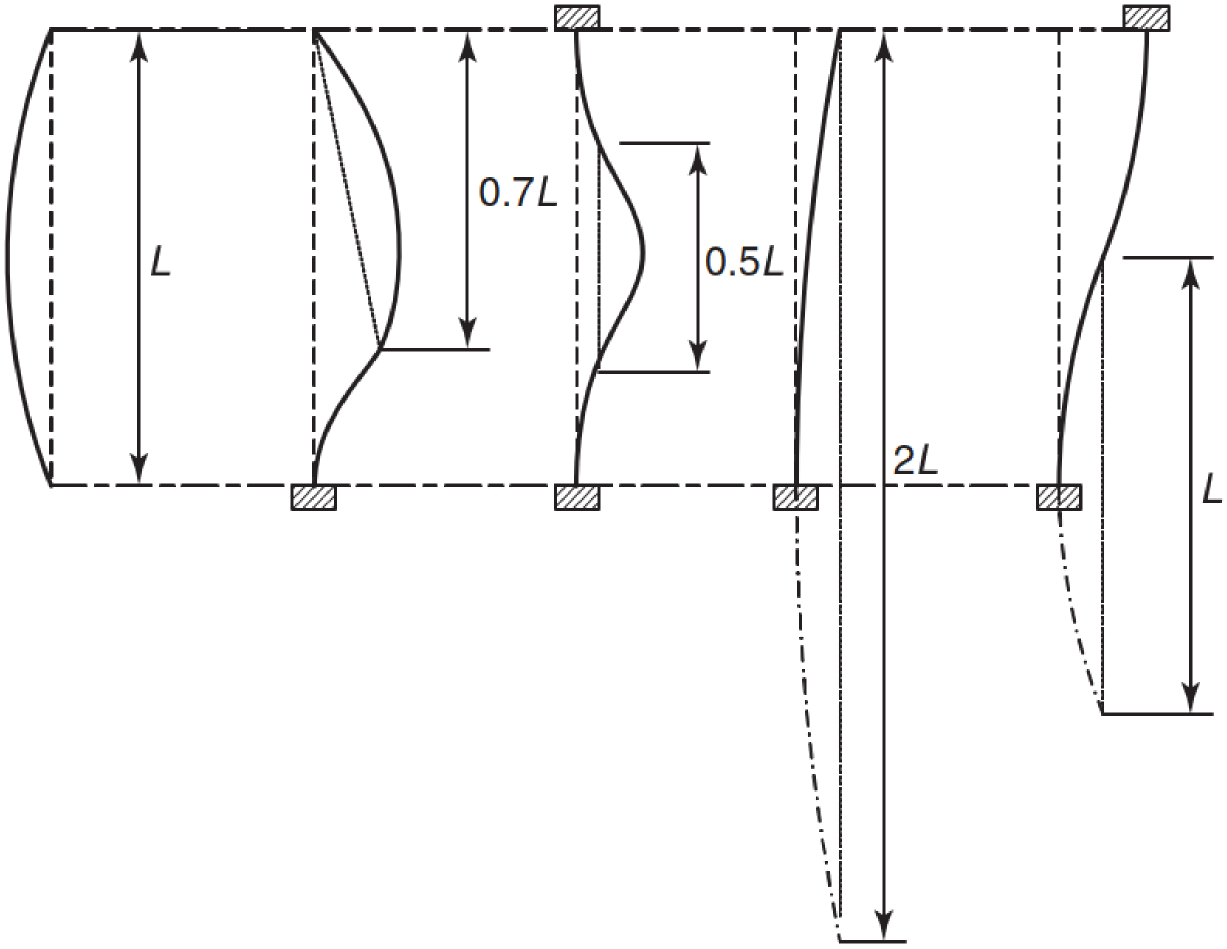


Fig. 2.7 Geometric interpretation of the effective length concept. /1/

Miten tuen jousto otetaan huomioon?

- Puurakenteet: ei suoraa ohjeistusta
- Teräsrakenteet: anturan jousto tarvittaessa otetaan huomioon

- Betonirakenteiset kehät: jouston suositusarvo k = 0,1
  - Toisessa päässä jäykkä tuenta: ideaalisauva Lc = **0,7L**

    -> l_0 = 0,5L*sqrt[(1+0,1/(0,45+0,1))*(1+1)]= **0,768L**

  - Mastopilari: ideaalisauva Lc = **2,0L**

    -> l_0 = L*max{sqrt[1+10*0,1];(1+0,1/(1+0,1) * (1+1))}

    = L*max{1,41; 2,18} = **2,18L**

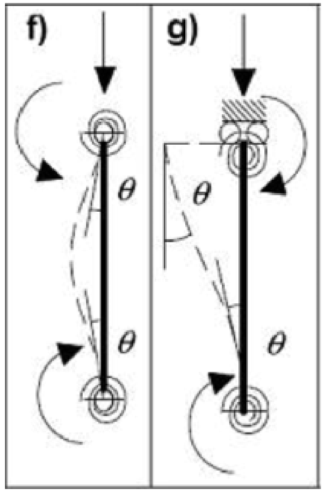
  - Mol. päistä jäykkä, sivusiirtyvä: ideaalisauva Lc = **1,0L**

    -> l_0 = L*max{sqrt[1+10*(0,1*0,1/(0,1+0,1)];(1+0,1/(1+0,1)^2)}

    = L*max{1,22; 1,19} = **1,22L**

$M = C\theta$

$k = (\theta/M \cdot (EI/l)$



Jäykistetyt sauvat (ks. kuvaa 5.7 (f)):

$$l_0 = 0{,}5l \cdot \sqrt{\left(1+\frac{k_1}{0{,}45+k_1}\right)\cdot\left(1+\frac{k_2}{0{,}45+k_2}\right)}$$

Jäykistämättömät sauvat (ks. kuvaa 5.7 (g)):

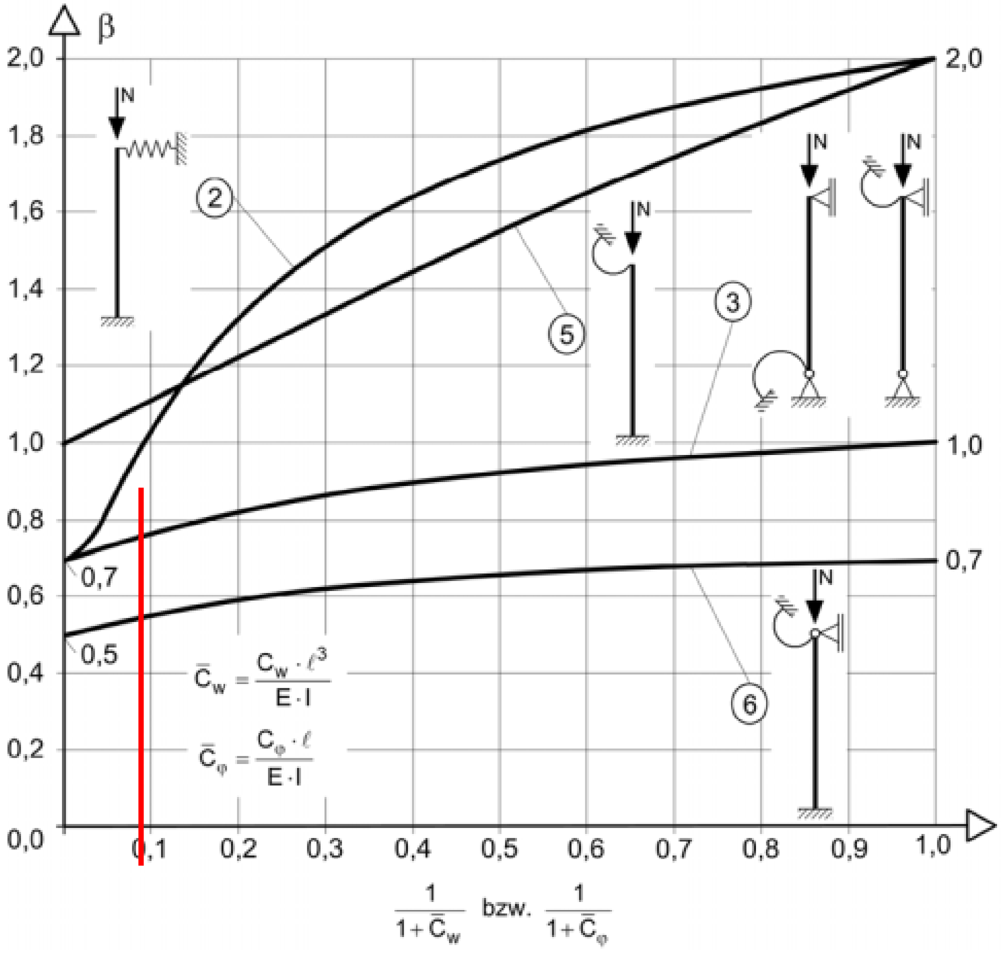
$$l_0 = l \cdot \text{maks}\left\{\sqrt{1+10\cdot\frac{k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}}\ ;\ \left(1+\frac{k_1}{1+k_1}\right)\cdot\left(1+\frac{k_2}{1+k_2}\right)\right\}$$

HUOM. $k = 0$ on jäykkää kiinnitystä vastaava teoreettinen raja, ja $k = \infty$ edustaa vapaasti kiertyvää päätä. Koska täysin jäykkä kiinnitys on harvinainen käytännössä, suositellaan kiertymäjoustavuuksien k_1 and k_2 vähimmäisarvoa 0,1.

Joustavan tuen vaikutus, esimerkkejä

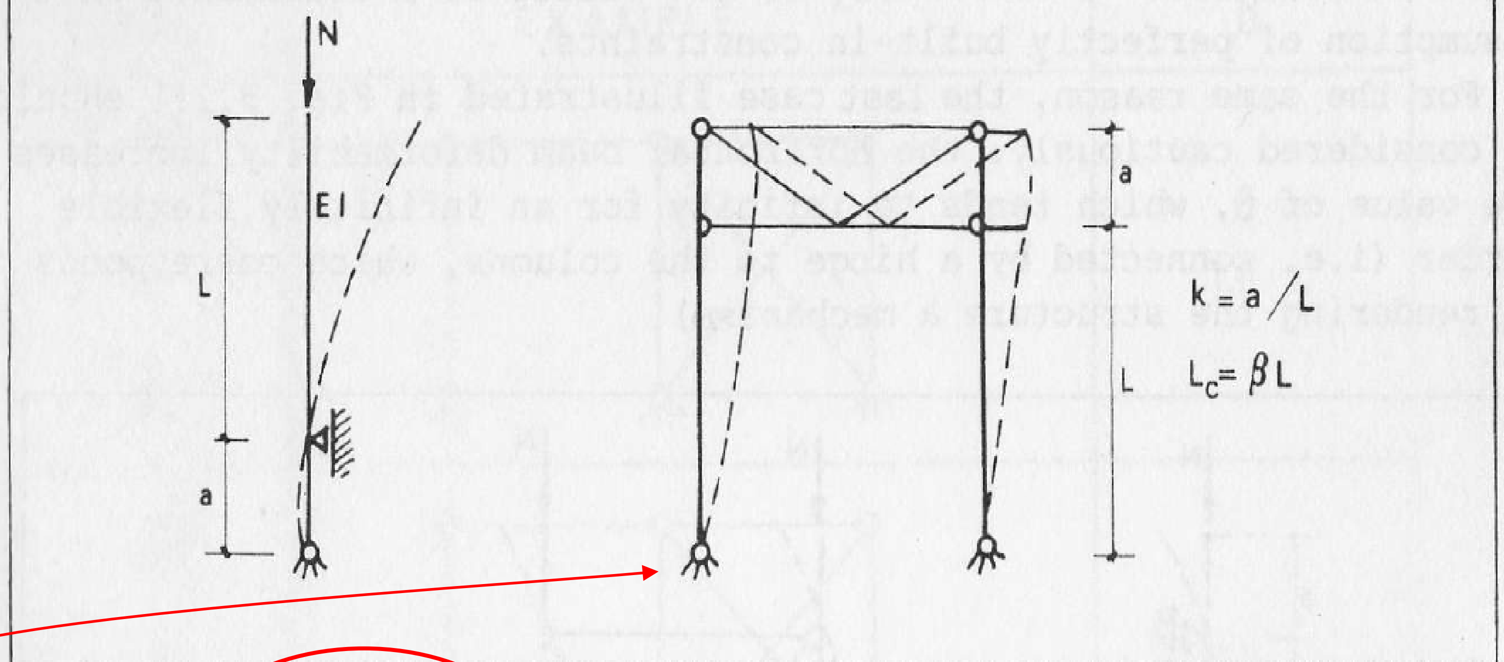
- Oheisessa kuvassa näytetty, miten tukien jousto vaikuttaa nurjahduspituuteen Lc = βL
- Betonieurokoodin kiertymäjouston arvo k = 0,1 vastaa vaaka-akselin arvoa

$$\frac{1}{1+C\varphi} = \frac{k}{k+1} = \frac{0{,}1}{0{,}1+1} = 0{,}091$$



/2/

Kehäpilari teräsristikossa

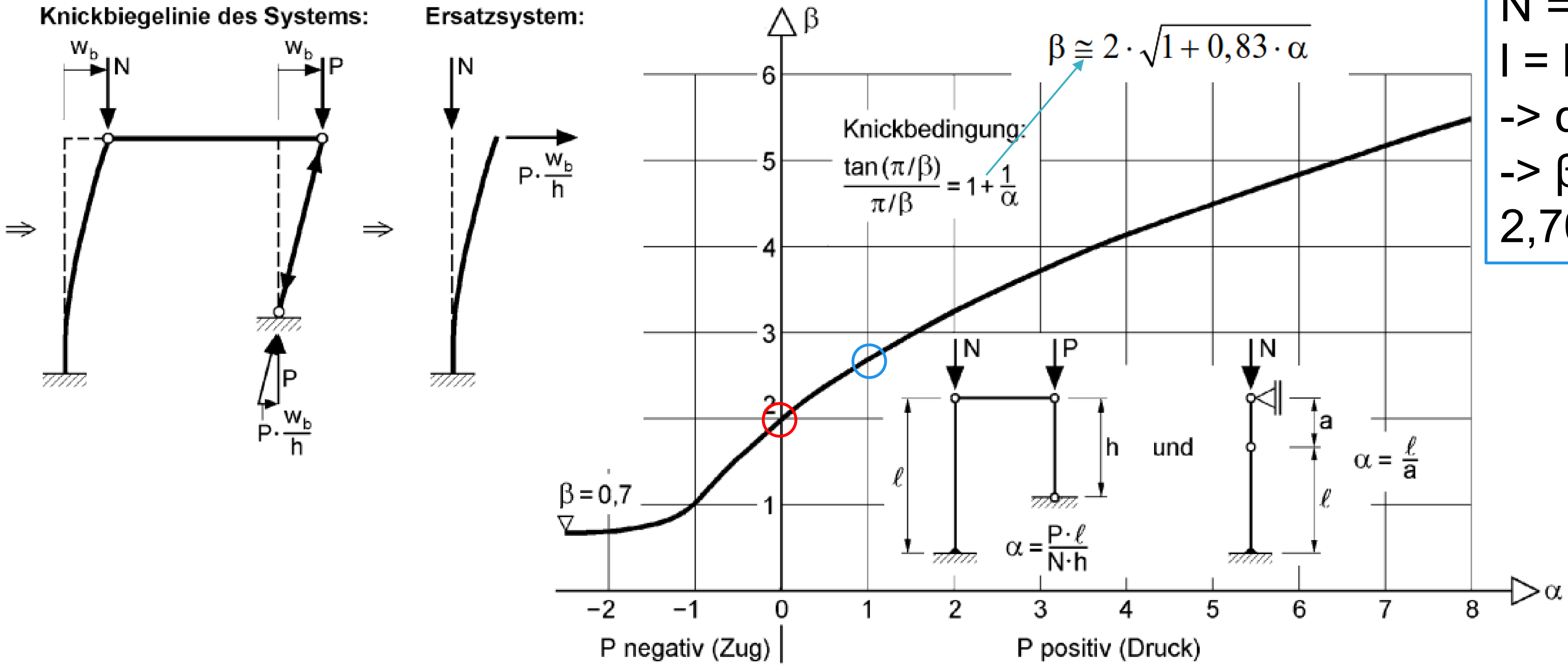


k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
β	2	2.07	2.13	2.20	2.27	2.34	2.41	2.48	2.55	2.62	2.70

/3/

Jäykkä tuenta β	1	1,03	1,06	1,1	1,14

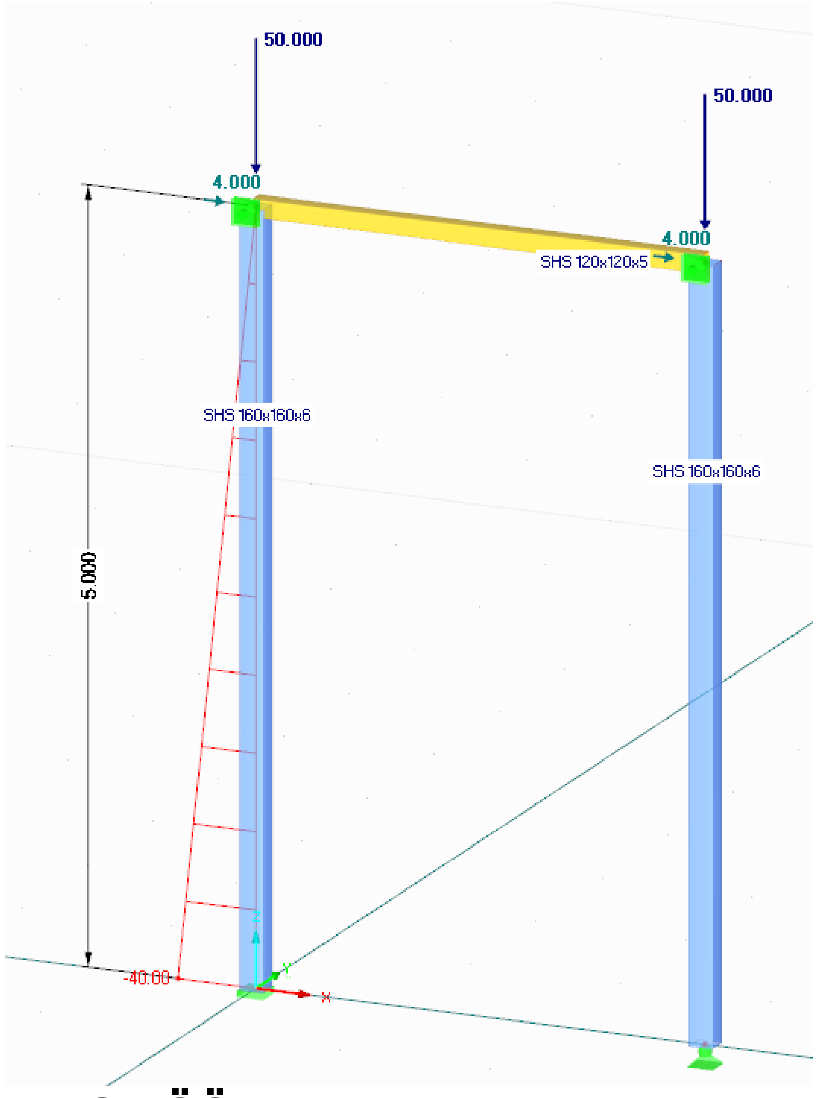
”nojaavien” pilareiden vaikutus



Esim.
N = P ja
l = h
-> α = 1
-> β = 2,706

/2/

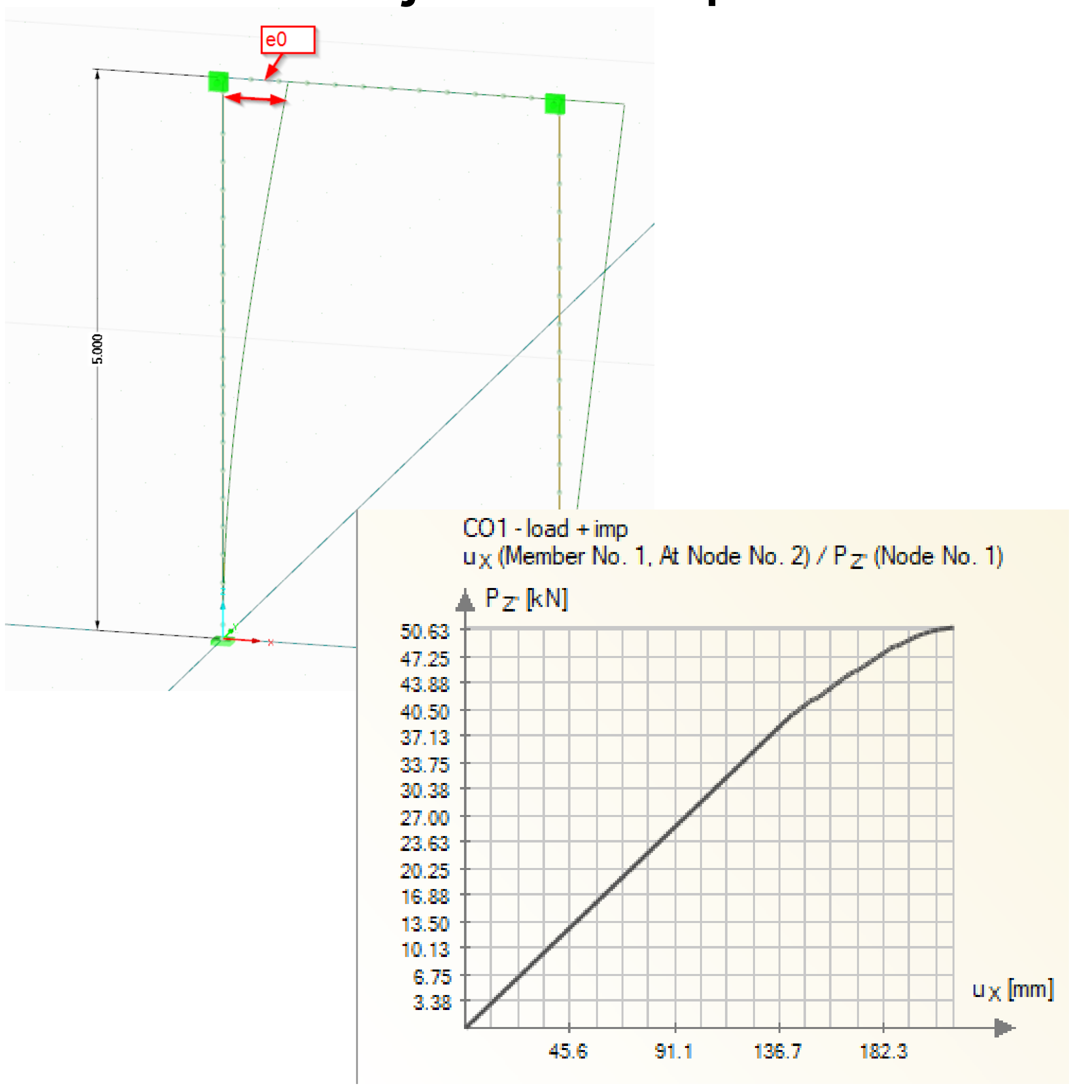
Esimerkki nojaavasta pilarista



- Numeerinen tarkastelu,
  - mastopilari ja nojaava pilari, N = 50 kN, H = 4 kN
  - H = 5 m, SHS 160*160*6 S355
- Lin. Nurjahdusanalyysi -> α_{cr} = 3,19 -> β = 2,703

- 1. kertaluvun mitoitus + mom. suurennuskerroin
  - Mmit = 1/(1-1/3,2) * 40 = 58,18 kNm
  - KA 106 %, kun β = 2,0
- 2. kertaluvun mitoitus (P – Δ)
  - Mmit = 56,5 kNm, v = 165 mm
  - KA 103 %, kun β = 2,0
- 1. kertaluvun mitoitus + korjattu nurjahduspit.
  - Mmit = 40 kNm
  - KA 101 %, kun β = 2,708

Esimerkki nojaavasta pilarista …



- Numeerinen tarkastelu, GMNIA
  - mastopilari ja nojaava pilari, N = 50 kN, H = 4 kN
  - H = 5 m, SHS 160*160*6 S355
  - Alkuhäiriö e0 = L/150 (nurjahdusluokka c, plasti.)
  - Käytetään e0 laskennassa nurj. pituutta L = Lc *)
  - e0 = 5000*2/150 = 66,7 mm (nurjahdusmuoto)
  - Ideaaliplastinen materiaali, fy = 355 MPa
- Kuormaa kasvatetaan askeleittain

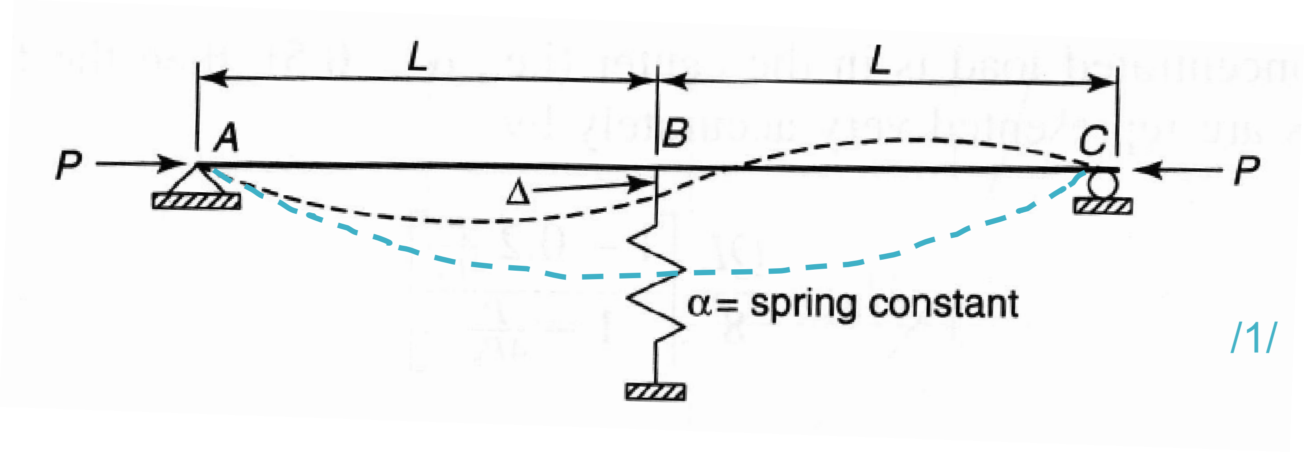
- Murto kuormakertoimella λ = 1,02
  - v = 212,8 mm, N = 51 kN ja M = 69,24
  - KA = 1/λ = 98 %

*) Eurokoodissa L on sauvan pituus, tässä valittu nurjahduspituus, joka on konservatiivinen valinta, koska kasvattaa alkuhäiriötä. Oletetaan, että alkuvinous sisältyy vaakakuormaan.

Jäykistysjärjestelmän epätarkkuudet ja jäykkyys

- Millaiselle voimalle puristetun sauvan välituenta pitää mitoittaa?

- Nyrkkisääntöjä löytyy esim. 2 % puristavasta voimasta. Onko asia näin yksinkertainen?

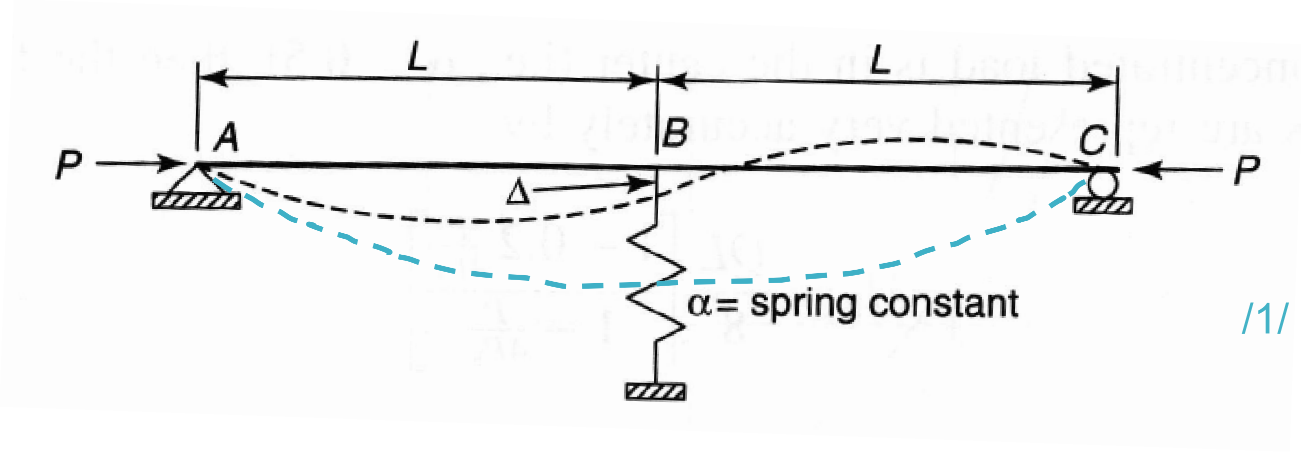


/1/

Jäykistysjärjestelmän jäykkyys

- Tarkastellaan kuvan mukaista sauva-jousi systeemiä.
- Niveltuettu sauva, johon vaikuttaa puristusvoima P.
- Keskellä jännettä vaikuttaa jousi

- Ilman jousta (α = 0) sauvan nurjahduskestävyys on $P_{cr0} = \dfrac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 0{,}25 \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$



/1/

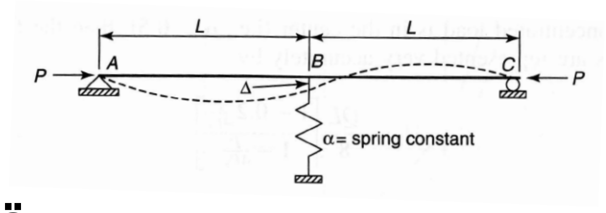
Jäykistysjärjestelmän epätarkkuudet

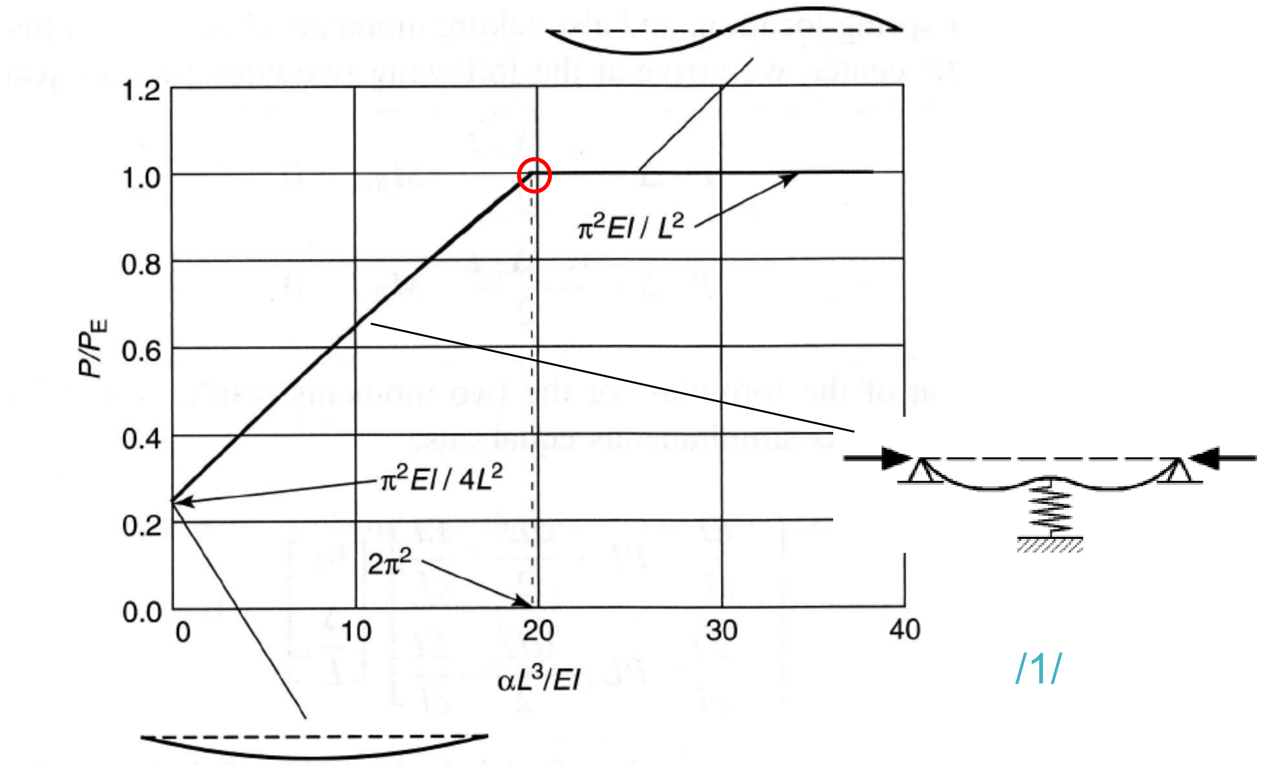
- Sauvan nurjahduskestävyys riippuu jousen jäykkyydestä. Se kasvaa jousen jäykkyyden mukana tiettyyn rajaan asti ja on suurimmillaan

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(L)^2} = 4P_{cr0}$$

- Tätä vastaava jousen kriittinen jäykkyys ideaalisauvan tapauksessa on

$$\alpha_r = \frac{2\pi^2 EI}{L^3} = \frac{2P_E}{L}$$



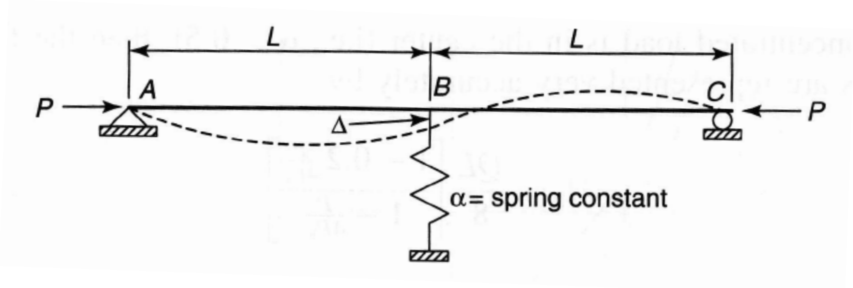


/1/

Laskentaesimerkki

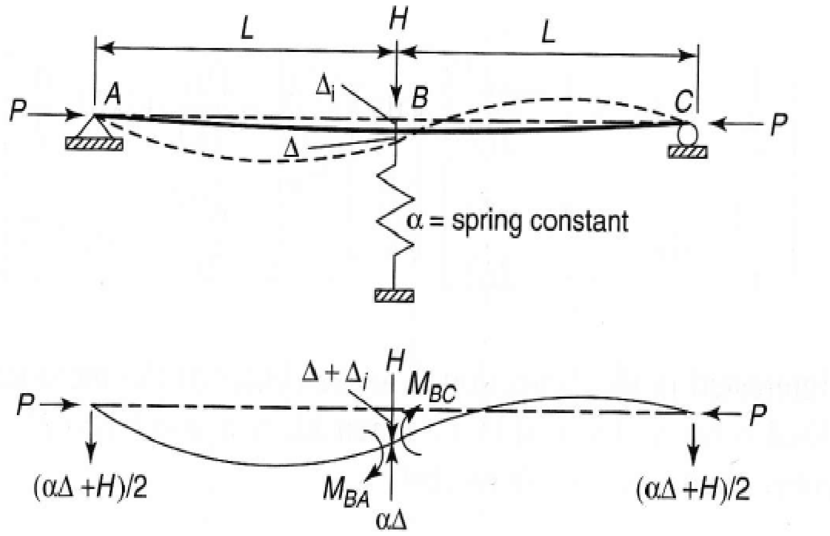
- Valitaan l = 2L = 6m ja profiiliksi HEA 200 (Iz = 1336 cm4, heikko suunta)
- Kahden aallon mukainen kimmoinen nurjahduskuorma on P_E = 3075 kN. Vaadittu jousivakion arvo on $\alpha_r = 2P_E/L$ = 2*3075/3 = 2050 kN/m (ideaalinen).
- Jos profiilin taipuma on jousen kohdalla esim. v ~ l/500 = 6000/500 =12 mm.
- Jousen voimaksi tulisi siten $F_r = \alpha_r$ v = 2050 N/mm * 12 mm = 24,6 kN

- Todellisuudessa edellä oleva tarkastelu kertoo vain, että millainen jousen jäykkyys tarvitaan **ideaalisen** sauvan tapauksessa. Siksi jousen voiman arvoa vain arvailtiin yllä. Seuraavassa tutkitaan asiaa vähän tarkemmin



Alkuhäiriön vaikutus nurjahduskestävyyteen

- Jousivoiman selvittämiseksi tarvitsee tutkia alkuhäiriön (Δ_i) vaikutusta systeemin toimintaan.
- Alkuhäiriön laskennallinen tarkastelu löytyy lähteestä /1/:
  - Tutkitaan momenttitasapainoa molemmin puolin keskikohtaa
  - Käytetään kulmanmuutosmenetelmää (stabiiliuskaavat)



$$M_{AB} = \frac{EI}{L}\left\{C \cdot \theta_A + S \cdot \theta_B - [C+S] \cdot \frac{\Delta}{L}\right\} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{EI}{L}\left\{S \cdot \theta_A + C \cdot \theta_B - [C+S] \cdot \frac{\Delta}{L}\right\}$$

$$M_{BC} = \frac{EI}{L}\left\{C \cdot \theta_B + S \cdot \theta_C + [C+S] \cdot \frac{\Delta}{L}\right\}$$

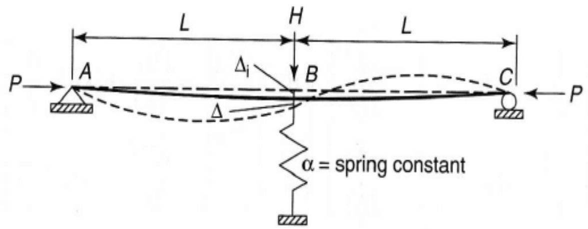
$$M_{CB} = \frac{EI}{L}\left\{S \cdot \theta_B + C \cdot \theta_C + [C+S] \cdot \frac{\Delta}{L}\right\} = 0$$

$$C = \frac{c}{c^2 - s^2} \qquad c = \frac{1}{(kL)^2}\left[1 - \frac{kL}{\tan kL}\right]$$

$$S = \frac{s}{c^2 - s^2} \qquad s = \frac{1}{(kL)^2}\left[\frac{kL}{\sin kL} - 1\right]$$

….

Alkuhäiriö …



…

$$\frac{\Delta}{L}=\frac{-\pi^2\cdot\frac{\Delta_i}{L}}{\pi^2-\frac{\alpha L^3}{2EI}}=\frac{\Delta_i}{L}\left[\frac{1}{1-\frac{\alpha L^3}{2\pi^2 EI}}\right] \rightarrow \frac{\Delta}{L}=\frac{\Delta_i}{L}\left[\frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha_{id}}-1}\right]$$

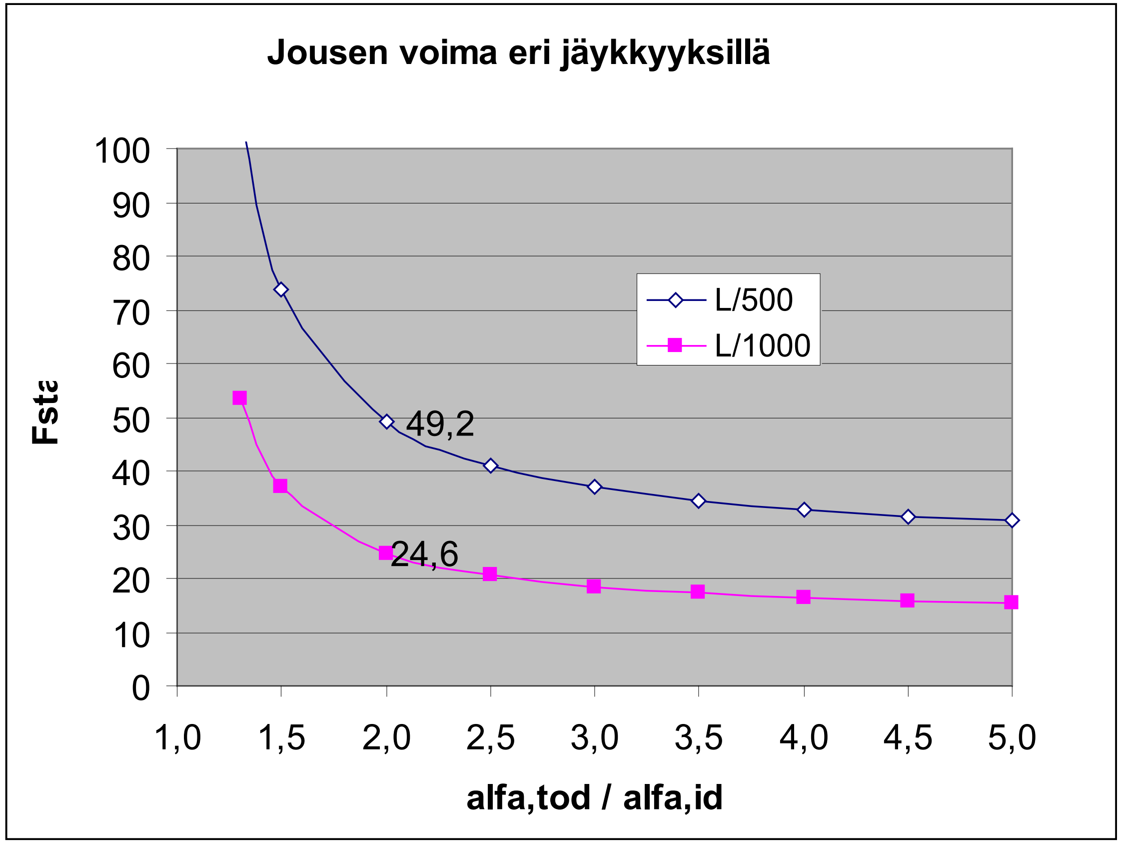
(Nyt $\alpha_{id} = 2\pi^2 EI/L^3 = 2P_E/L$)

$$F_{req}=\alpha\cdot\Delta=\Delta_i\left[\frac{\alpha_{id}}{1-\frac{\alpha_{id}}{\alpha}}\right]$$

α_{id} = ideaalinen jäykkyys

α = todellinen jäykkyys

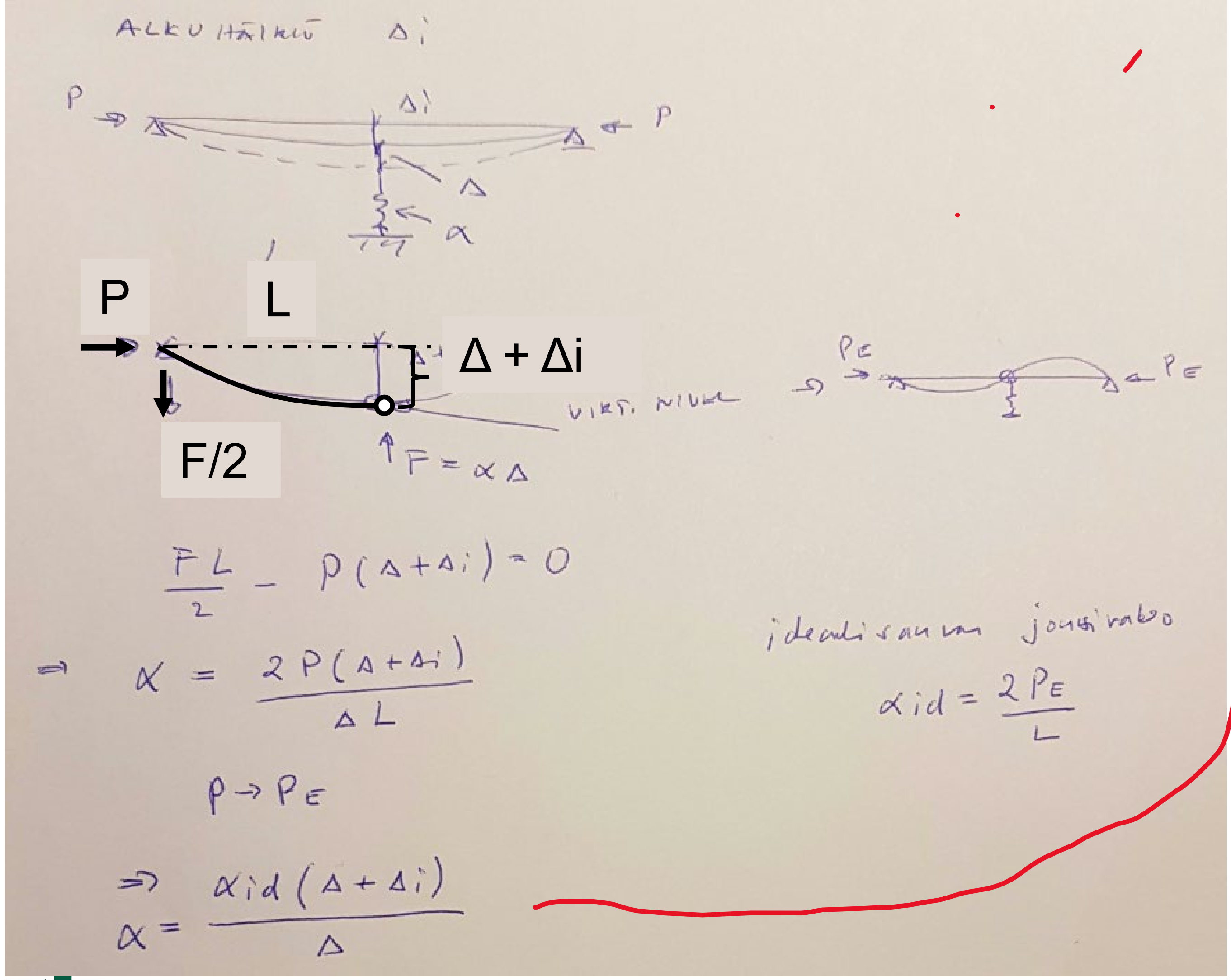
Δ_i = alkuhäiriö



A-INSINÖÖRIT

Ratkaisu virtualisen nivelen avulla

George Winter, Lateral Bracing of Columns and Beams, ASCE Transactions VOL 125, 1960



$$\frac{FL}{2} - P(\Delta + \Delta_i) = 0$$

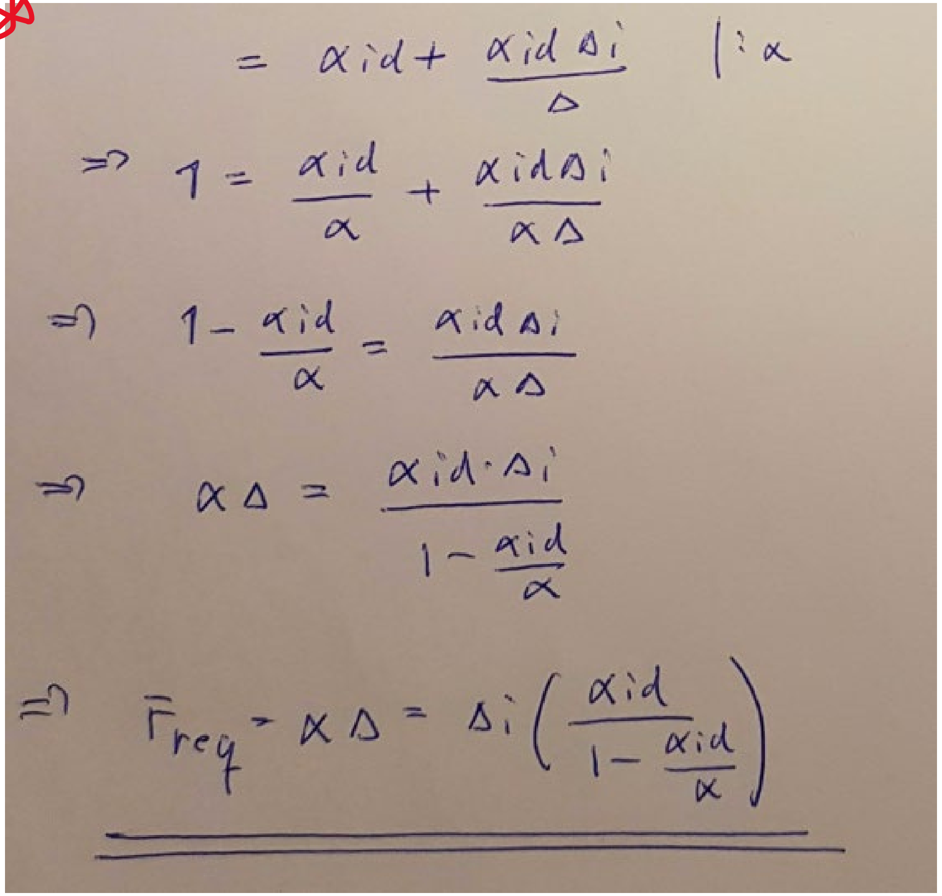
$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2P(\Delta + \Delta_i)}{\Delta L}$$

$$P \rightarrow P_E$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha_{id}(\Delta + \Delta_i)}{\Delta}$$

idealisoinnin jousivakio

$$\alpha_{id} = \frac{2P_E}{L}$$



$$= \alpha_{id} + \frac{\alpha_{id}\Delta_i}{\Delta} \quad | : \alpha$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\alpha_{id}}{\alpha} + \frac{\alpha_{id}\Delta_i}{\alpha\Delta}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha_{id}}{\alpha} = \frac{\alpha_{id}\Delta_i}{\alpha\Delta}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\Delta = \frac{\alpha_{id}\cdot\Delta_i}{1 - \frac{\alpha_{id}}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad F_{req} = \alpha\Delta = \Delta_i\left(\frac{\alpha_{id}}{1 - \frac{\alpha_{id}}{\alpha}}\right)$$

Tarvittava sidevoima

- Jos sauvassa on alkuhäiriö (todellinen rakenne), ei ideaalisauvan mukainen jousen jäykkyys riitä ja sidevoimaa kasvaa äärettömän suureksi.

- Jos otetaan lähtökohdaksi **2-kertainen** jäykkyys jouselle (idealisauvan tilanteesen verrattuna) ja käytetään teräseurokoodin alkuhäiriötä eli L/500 (tässä L = 2L). Verrataan tästä aiheutuvaa sidevoiman arvoa Fr = 49,2 kN sauvan kuormitukseen eli

$$Fr / P_E = 49{,}2 / 3075 = 0{,}016 = 1{,}6\ \%.$$

- Eli tarvittava siteen kuormankestävyys on luokkaa 2 % tuettavan sauvan kuormituksesta, joka vastaa hyvin vanhaa nyrkkisääntöä, jos jousen jäykkyys on vähintään 2-kertainen ideaalisauvan jäykkyyteen verrattuna.

Sidevoima Eurokoodin mukaan

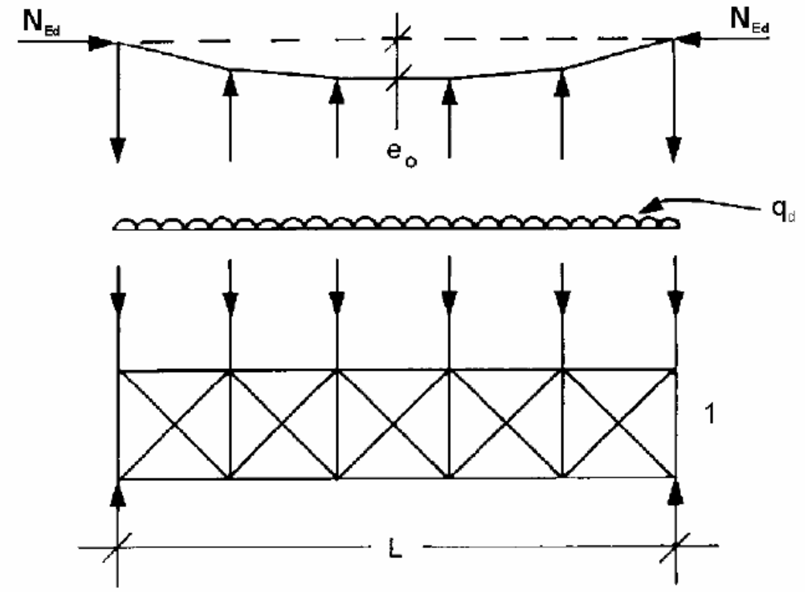
SFS-EN 1993-1-1

$$e_0 = \alpha_m L / 500$$

missä L on jäykistysjärjestelmän jänneväli

ja $$\alpha_m = \sqrt{0,5\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

missä m on tuettavien sauvojen lukumäärä.



e_0 *Epätarkkuus*
q_0 *Ekvivalentti voima pituusyksikköä kohti* [2)]
1 Jäykistysjärjestelmä

Voiman N_{Ed} oletetaan olevan vakio jäykistysjärjestelmän pituudella L. Jos N_{Ed} ei ole vakio, menetelmä on jonkin verran varmalla puolella.

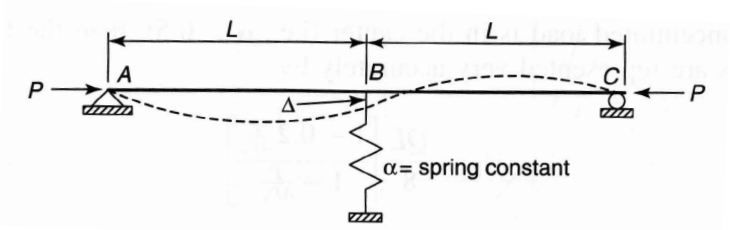
(2) Jäykistysjärjestelmien tukemien sauvojen alkukaarevuuden muodossa olevien alkuepätarkkuuksien vaikutukset voidaan korvata käyttämällä kuvan 5.6 mukaista ekvivalenttia stabiloivaa voimaa, joka lasketaan kaavasta:

$$q_d = \sum N_{Ed}\, 8 \frac{e_0 + \delta_q}{L^2} \tag{5.13}$$

missä δ_q on jäykistysjärjestelmän taipuma tasossaan, joka aiheutuu kuormasta q_d ja ulkoisista kuormista, jotka lasketaan ensimmäisen kertaluvun teorian mukaan.[1)]

[1)] Suomentajan huomautus:
Kaavan (5.13) käyttö edellyttää iteratiivisia laskelmia. Oikea merkintä on q_{Ed}.

Ideaalisauva Eurokoodin mukaan

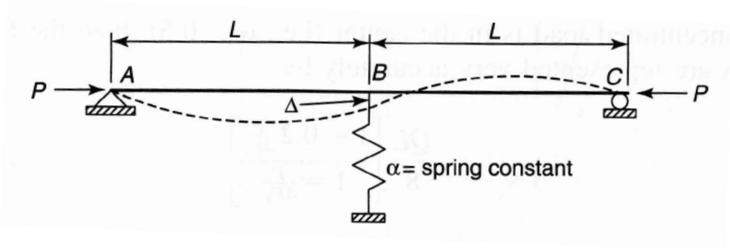


- L = 6 m. Sauvan alkuepäkeskisyys e0 = L/500 = 12 mm (α_m = 1)
- Annetaan kuormaksi N = 3075 kN ja **ideaalinen jousivakio** αr = 2050 kN/m
- Tästä epäkeskisyydestä johtuva ekvivalentti kuormitus saa arvon
  $q_{d0} = 8N_{Ed}e0/L^2 = 8*3075*0{,}012/6^2 = 8{,}2$ kN/m
- Keskellä oleva jousi ottaa puolet kokonaiskuormasta (ol. nivel keskellä) eli
  $F0 = q_{d0}L/2 = 8{,}2*6/2 = 24{,}6$ kN
- Jousen painuma kuormasta δq0 = F0/αr = 24,6 / 2050 = 0,012 m = 12 mm
- Taipuman vaikutus kuormitukseen
  $q_{d1} = 8N_{Ed}(e0+\delta q0)/L^2 = 8*3075*(0{,}012+0{,}012)/6^2 = 16{,}4$ kN/m
- Iteroidaan muutaman kerran

δq1 = F1/αr = 16,4*6*0,5 / 2050 = 0,024 m = 24 mm.
qd2 = $8N_{Ed}(e0+\delta q1)/L^2 = 8*3075*(0{,}012+0{,}024)/6^2 = 24{,}6$ kN/m
δq2 = F2/αr = 24,6*6*0,5 / 2050 = 0,036 m = 36 mm
qd3 = $8N_{Ed}(e0+\delta q2)/L^2 = 8*3075*(0{,}012+0{,}036)/6^2 = 32{,}8$ kN/m
δq3 = F3/αr = 32,8*6*0,5 / 2050 = 0,048 m = 48 mm
qd4 = $8N_{Ed}(e0+\delta q3)/L^2 = 8*3075*(0{,}012+0{,}048)/6^2 = 41$ kN/m
… EI KONVERGOI

- *Jousen voima kierroksella F_4 = 41*6/2 = 123 kN, joka on 123/3075 = 4 %* kuormituksesta.
  Mutta jatkaa kasvamista, koska **iteraatio ei suppene!**
- Huom! **Tässä oli ideaalinen jousivakio, joten ratkaisun ei kuulutkaan konvergoida!**

2-kertainen jousivakio



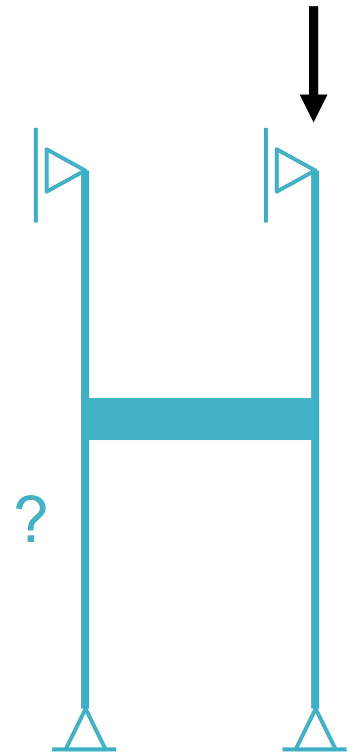
- Muutetaan sauvan jousivakioksi α,tod = **2***2050 = 4100 N/mm ja kuormaksi sama alkuperäinen kuorma N = 3075 kN.
- Epäkeskisyys on sama e0 = L/500 = 12 mm
- Nyt 9. iteraatiokierroksen jälkeen saadaan jousivoimaksi F_{Ed} = 16,37*6/2 = 49,1 kN, joka on 49,1/3075 = 1,6 % kuormituksesta. Sauvan taipuma on 12 mm. Analyyttinen ratkaisu (kuva edellä) antaa sidontavoimaksi 49,2 kN eli saman tuloksen.

- Edellisessä kuormana oli kimmoinen nurjahduskuorma, jota ei voi todelliseen rakenteeseen asettaa. Suurin kuormitus voi olla normin mukainen nurjahduskuorma (1280 kN). Tällä laskien edellinen tapaus (2 x id.jousivakio) antaa jousivoimaksi F_{Ed} = 12,93 kN, joka on noin 1 % kuormituksesta eli nurjahduskuormasta. Sauvan puristuskuorman suuruus vaikuttaa tietenkin myös sidontavoimaan.

Yhteenveto

- Nurjahduspituudet vaikuttavat voimakkaasti sauvan nurjahduskestävyyteen
- Selvitä/arvio tukien jousto ja käytä muunnettuja nurjahduspituuksia
- Käytä tarvittaessa lineaarista nurjahdusanalyysiä (LBA)

- Jäykistysjärjestelmän jäykkyys pitää olla riittävä, jotta tuettavan sauvan nurjahduspituus vastaa tukiväliä
- 2 % sääntö sidevoimalle on edelleen hyvä lähtökohta alustavaan mitoitukseen, kunhan jäykistysjärjestelmän jäykkyys on ”silmin nähden” riittävä
- Lopulliseen mitoitukseen löytyy teräseurokoodista työkalu, jolla sidevoiman suuruus voidaan määrittää



Kiitos

Jari Hietala
Kehityspäällikkö
Puh. 040 8220940
jari.hietala@ains.fi

A-INSINÖÖRIT