

MILLAINEN NORMI SOPII OPTIMOINTIIN?

Kristo Mela

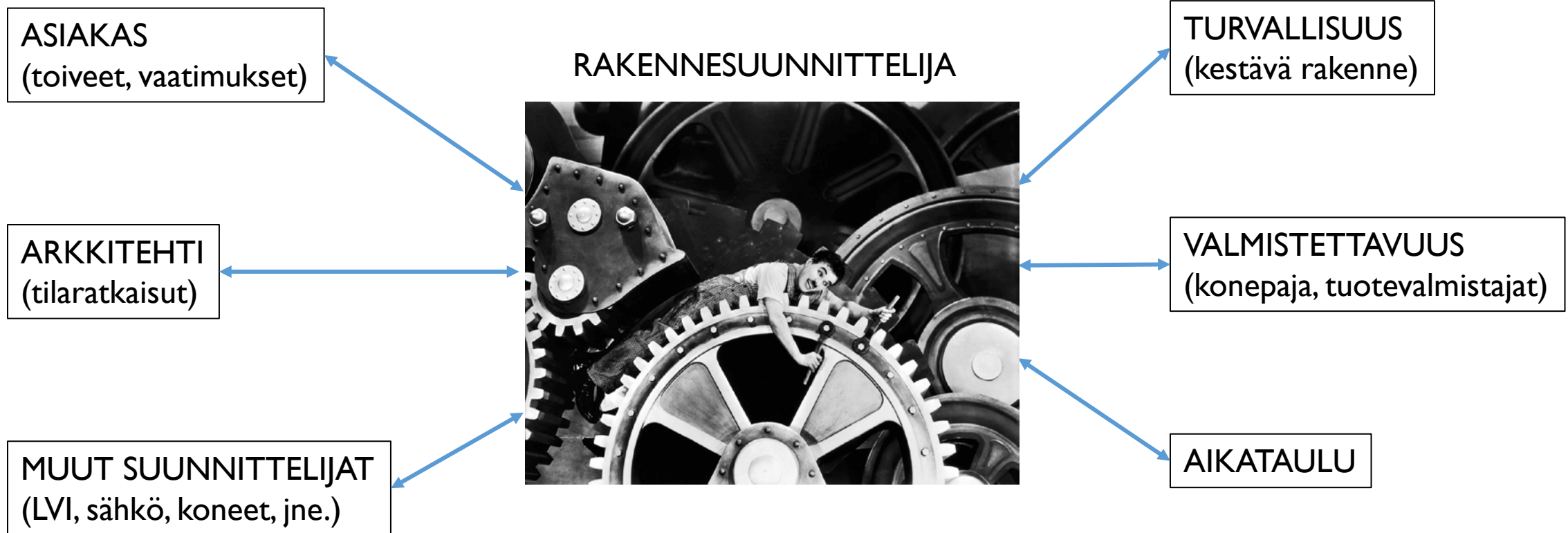
Tenure track -tutkija
Tampereen yliopisto

+358 40 849 0563

kristo.mela@tuni.fi

RAKENNESUUNNITTELIJAN TOIMINTAYMPÄRISTÖ *- miksi optimoida?*

RAKENNESUUNNITTELIJAN ROOLI



SUUNNITTELIJAN TYÖKALUT

STANDARDIT, OHJEET
(Eurocode, RIL, TRY, ECCS)

MALLINNUSOHJELMAT
(Tekla)

LASKENTA- JA
MITOITUSOHJELMAT
(Robot, Excel, Mathcad,...)

RAKENNESUUNNITTELIJA



LUJUUSOPPI ja
RAKENTEIDEN
MEKANIikka

LUOVUUS

KOKEMUS

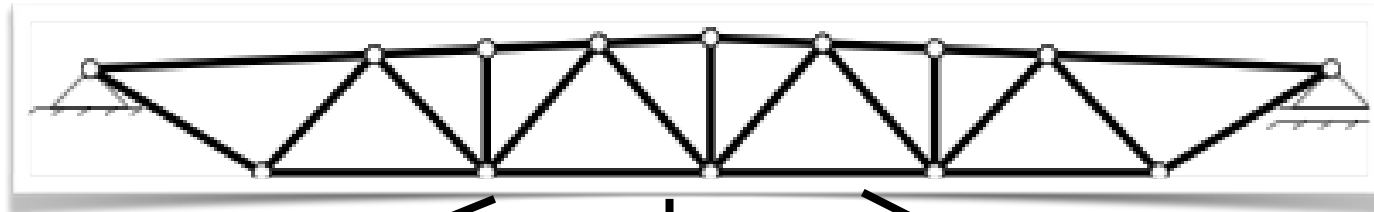
SUUNNITTELIJAN TAVOITTEET

- Käytettävissä olevien resurssien (aika, raha, osaaminen) puitteissa tehdään
 - a) Toimiva rakenne
 - b) Kilpailijoita parempi rakenne
 - c) Paras mahdollinen rakenne
- Pyrkimys parempaan ja kohti parasta pitäisi olla insinöörillä sisäänrakennettu ominaisuus.
 - Näissä pyrkimyksissä voidaan käyttää kaikkia mahdollisia apuvälineitä.
 - *Matemaattinen optimointiteoria* tarjoaa voimakkaan työkalun suunnittelu- ja kehitystyön tueksi.

Miksi suunnittelijan pitäisi pyrkiä parhaimpaan?

SUUNNITTELU JA OPTIMOINTI

SUUNNITTELUN KOLMIJALKA



VALMISTUS

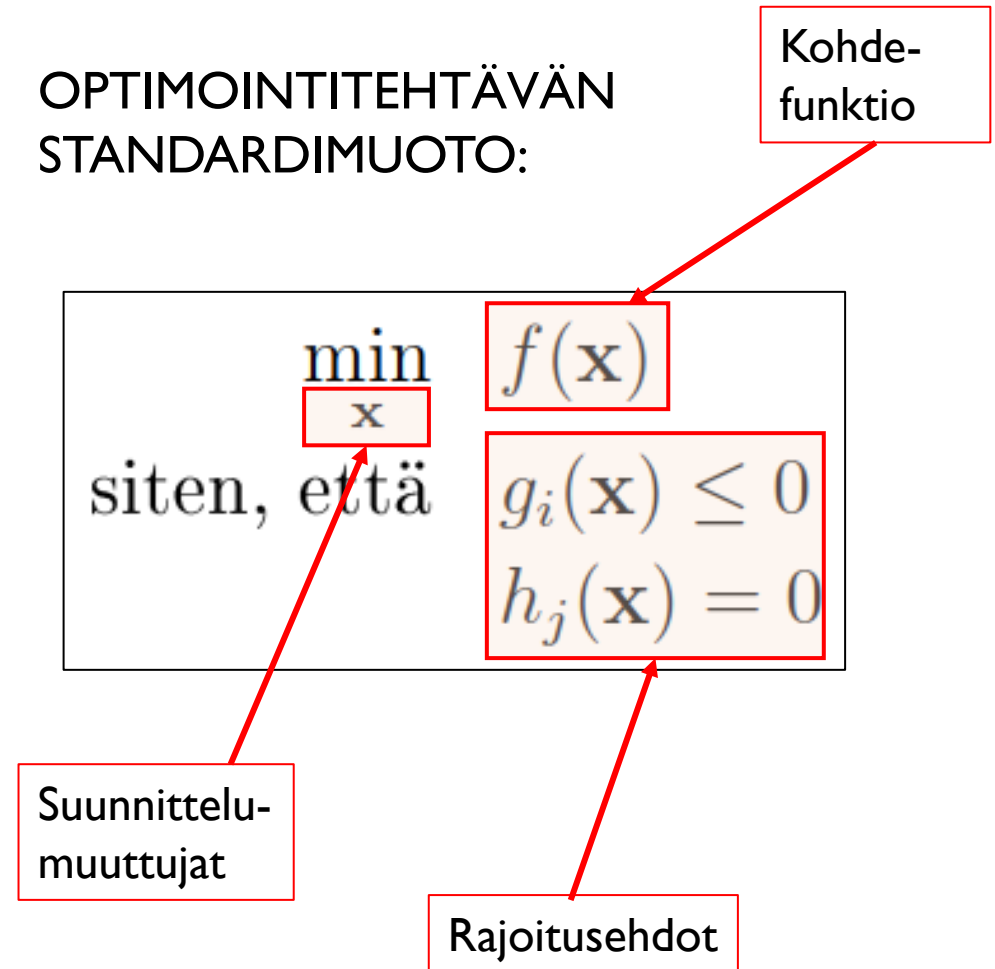
MITOITUS

TALOUDELLISUUS

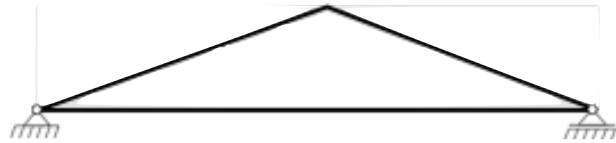
MITÄ OPTIMOINTI ON?

- *Parhaan* ratkaisun *systemaattista* etsintää.
- Vaatii suunnittelutehtävän *matemaattisen esityksen*.
- Etsintä suoritetaan soveltuvien *algoritmien* avulla.
- Muutaman vaihtoehdon vertailu tai ratkaisun parantelu käsin **EI** ole optimointia.

OPTIMOINTITEHTÄVÄN
STANDARDIMUOTO:

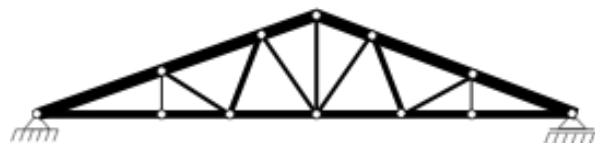


OPTIMOINTIPROSESSI



$$\min_{A_i} V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_E} L_i A_i$$

such that $\underline{\sigma}_i \leq \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma}_i, \quad \text{if } A_i > 0$
 $0 \leq A_i \leq \bar{A}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_E$



min kg

OPTIMOINNIN SOVELTAMINEN

- Rakennemalli on *parametrisoitava*: mallia on pystyttävä muokkaamaan mallinnusohjelman ulkopuolelta.
- Rakenneanalyysi on tehtävä *automaattisesti*.
- *Eurokoodien mitoitusäännöt* on formuloitava rajoitusehdoiksi.
- Suunnittelumuuttujien arvot on välitettävä rakennemalliin.
- Rakenneanalyysin tulokset on muunnettava rajoitusehtojen vaatimiin muotoihin.
- Optimointialgoritmi on valittava viisaasti.



Mallin muokkaus
 \mathbf{x}^k :n mukaan



$u(\mathbf{x}^k), N(\mathbf{x}^k)$
 $M(\mathbf{x}^k)$



\mathbf{x}^k



$f(\mathbf{x}^k), g_i(\mathbf{x}^k)$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{sitien, että } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

OPTIMOINTI ja EUROKOODIT

OPTIMOINTI ja EUROKOODIT

- Eurokoodien mitoitusäännöt kirjoitetaan *epäyhtälömuotoisiksi rajoitusehdoiksi*.
 - Pääsääntöisesti mitoitusäännöt ovat periaatteessa valmiiksi optimointiin sopivassa muodossa.
- Eurokoodin mitoitusääntöjä on katsottava erilaisista *suunnittelumuuttujista riippuvina matemaattisina funktioina*.
- Keskeiset kysymykset ovat:
 1. Miten eurokoodista poimitun funktion arvo lasketaan?
 2. Onko funktio suunnittelumuuttujien suhteen *jatkuva* ja (jatkovasti) *derivoituva*?
- Optimointitehtävän matemaattisella struktuurilla on keskeinen rooli tehtävän ratkaistavuuden kannalta.

$$\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{sitien, että } \boxed{g_i(\mathbf{x}) \leq 0} \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

YLEINEN MITOITUSEHTO:

$$E(\mathbf{x}) \leq R(\mathbf{x})$$

E ... Kuormien vaikutus

R ... Kestävyys

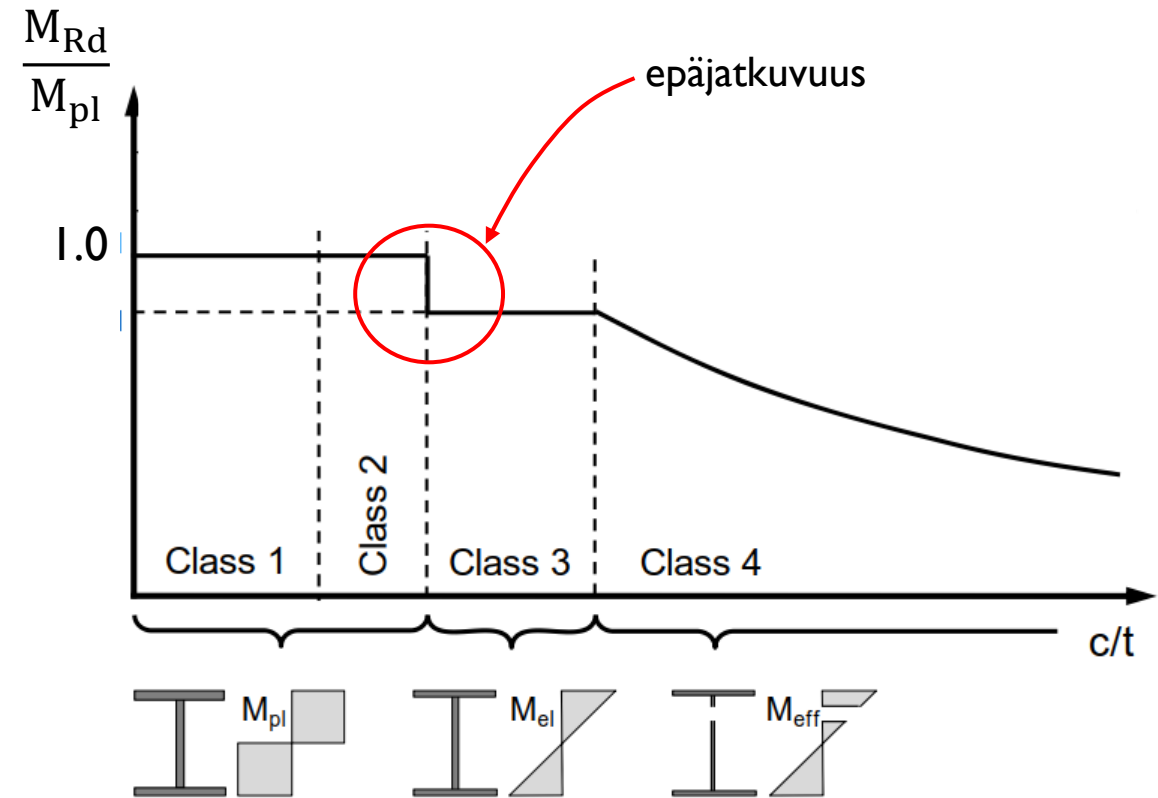
”KÄYTTÖASTE”:

$$\frac{E(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})} \leq 1.0 \quad \rightarrow \quad g(\mathbf{x}) = \frac{E(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})} - 1.0 \leq 0$$

OPTIMOINTI ja EUROKOODIT

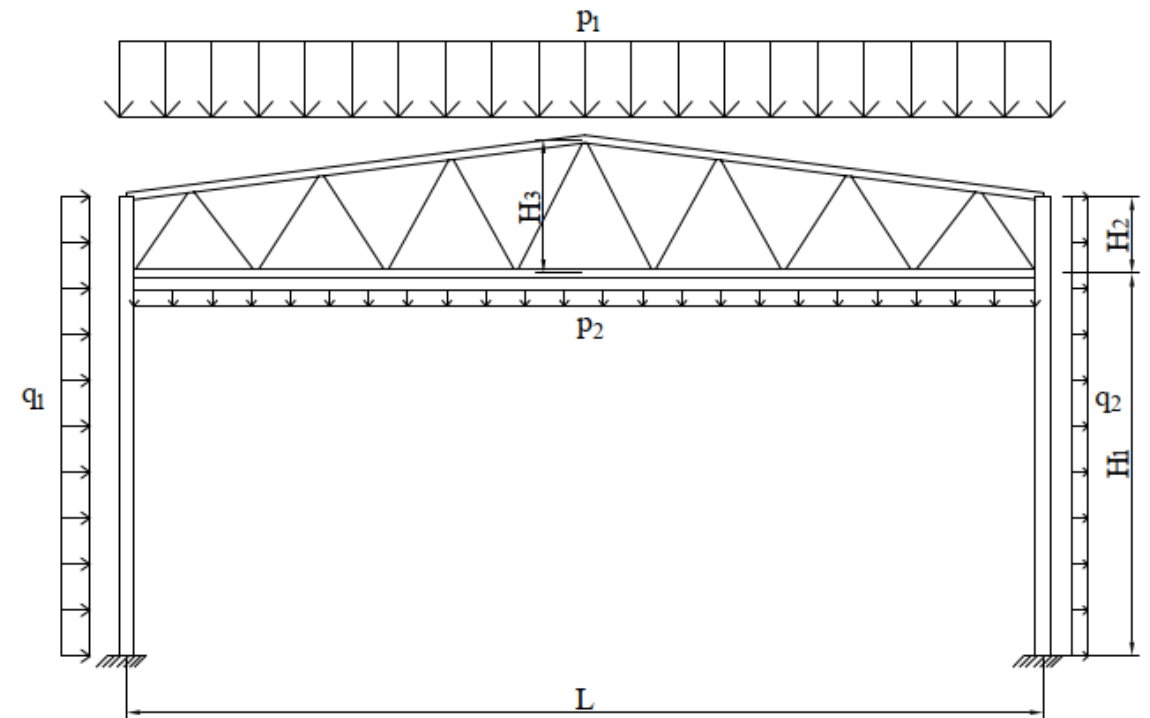
IHANTEELLINEN MAAILMA

- Kestävyyksien lausekkeet ovat *sileitä funktioita* rakenteen geometrian ja sauvojen poikkileikkaussuureiden suhteen.
- Kestävyyksien lausekkeissa on *mahdollisimman vähän ehdollisuuksia*, ja siirtymät eri ehtojen välillä eivät johda epäjatkuvuuksiin tai epäderivoituvuuksiin.
- Kestävyyksien laskennassa tarvittavien kertoimien *arvoja EI katsota taulukoista eikä varsinkaan käyriltä*, vaan ne voidaan laskea rakenteen parametreista riippuvien lausekkeiden avulla.



ESIMERKKI: TERÄSKEHÄN OPTIMOINTI*

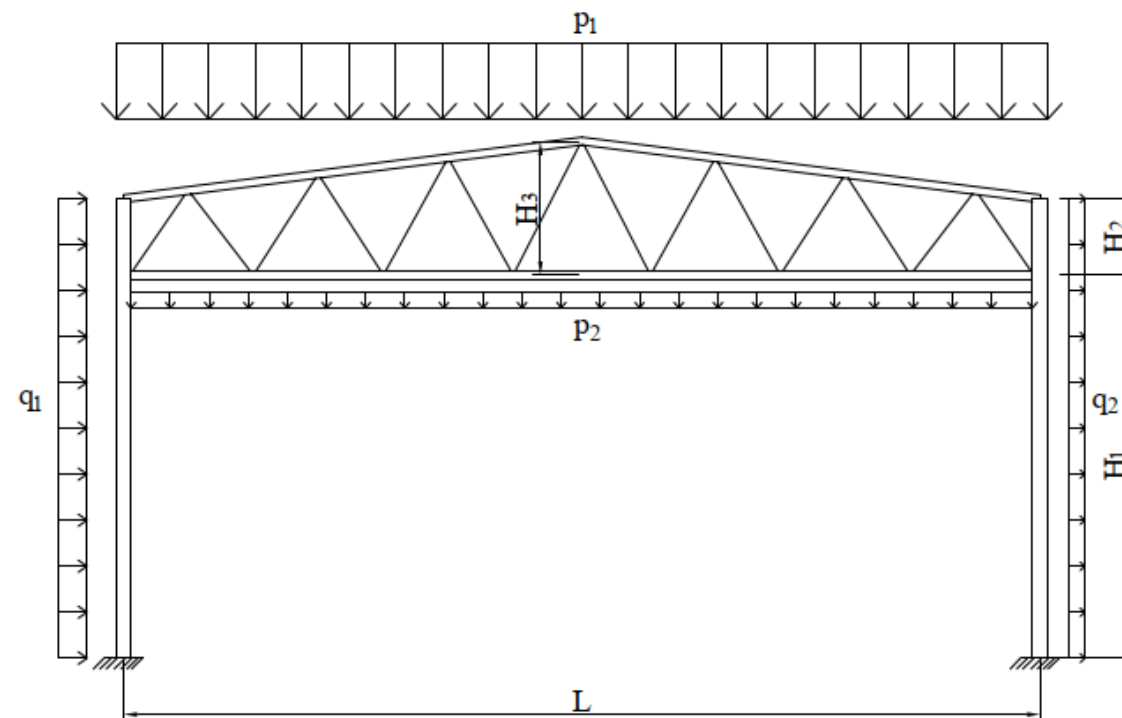
- Rajoitusehdot standardista EN 1993
 - Sauvojen poikkileikkauskestävyys: yksittäiset rasitukset ja niiden yhdistelmät.
 - Sauvojen stabiilisuus: ristikon sauvoilla nurjahdus, pilarilla myös kiepahdus.
 - Pilari ja ristikon yläpaarre ovat puristettuja ja taivutettuja sauvoja.
- Rasitusten etumerkit ja tarkasteltavat poikkileikkaukset on katsottava huolellisesti.



*Helminen M., *Optimization of a trussed steel portal frame*, Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2017.

RAJOITUSEHDOT – poikkileikkausten kestävyys

- Jokaiselle sauvalle kirjoitetaan *kaikissa kuormitusyhdistelyissä kriittisille poikkileikkauksille* kestävyys ehdot.
- Kriittiset poikkileikkaukset: rasiusten maksimikohdat, yhteisvaikutusehtojen kannalta määräävät kohdat.
- Kriittiset poikkileikkaukset on tunnistettava etukäteen, esim.
 - FEM-mallin solmupisteet
 - Sauvan päätepisteet ja keskijänne



Kuva: Helminen (2017)

RAJOITUSEHDOT: *poikkileikkauskestävyys*

Yksittäiset rasitukset, EN 1993-1-1, Tasotapaus

- Kaavoissa rasitusten mitoitusarvoilla ('Ed') on aina positiivinen arvo.
 - Laskennassa rasitusten etumerkkiä ei välttämättä tiedetä etukäteen.
- Eurokoodin mukaiset rajoitusehdot ovat luonnostaan "käyttöastemuodossa".
- Niin kestävyudet kuin rasitukset riippuvat suunnittelumuuttujista.
 - Kestävyyksien lausekkeet ovat suoraviivaisia.
- Optimoinnissa on varauduttava myös negatiivisiin rasitusten arvoihin.

VETO:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{t,Rd}} \leq 1,0$$

PURISTUS:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{c,Rd}} \leq 1,0$$

TAIVUTUSMOMENTTI:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \leq 1,0$$

LEIKKAUS:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \leq 1,0$$

RAJOITUSEHTOINA:

$$-N_{i,Rd}(\mathbf{x}) \leq N_i \leq N_{i,Rd}(\mathbf{x})$$

$$-M_{i,Rd}(\mathbf{x}) \leq M_i \leq M_{i,Rd}(\mathbf{x})$$

$$-V_{i,Rd}(\mathbf{x}) \leq V_i \leq V_{i,Rd}(\mathbf{x})$$

RAJOITUSEHDOT: poikkileikkauskestävyys

Rasitusten yhteisvaikutus, EN 1993-1-1

- Teräsrakenteilla on käytössä yksinkertainen lineaarinen yhteisvaikutuskaava.
- Plastisuusteoriaa hyödynnettäessä voidaan käyttää tehokkaampia yhteisvaikutuskaavoja.
- Rasitusten mitoitusarvo voidaan hoitaa kahdella tavalla optimoinnissa:
 - 1) Otetaan rajoitusehtoihin rasituksista *itseisarvot*. Tällöin voidaan käyttää suoraan normin esitystapaa, mutta derivoituvuuden kanssa voi tulla ongelmia, jos rasitusten etumerkki muuttuu suunnittelumuuttujien arvoja muuteltaessa.
 - 2) Kirjoitetaan rajoitusehdot siten, että rasitusten etumerkit voivat olla + tai -. Tällöin tehtävään tulee enemmän rajoitusehtoja, mutta derivoituvuudesta ei tule ongelmia.

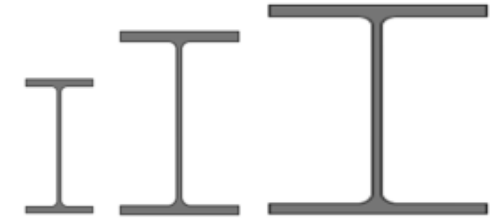
NORMAALIVOIMA JA TAIVUTUSMOMENTTI:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \leq 1$$

RAJOITUSEHTOINA:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{N_i(\mathbf{x})}{N_{i,Rd}(\mathbf{x})} + \frac{M_i(\mathbf{x})}{M_{i,Rd}(\mathbf{x})} \leq 1 \\ -1 &\leq \frac{N_i(\mathbf{x})}{N_{i,Rd}(\mathbf{x})} - \frac{M_i(\mathbf{x})}{M_{i,Rd}(\mathbf{x})} \leq 1 \end{aligned}$$

RAJOITUSEHDOT: *poikkileikkauskestävyys*



Rasitusten yhteisvaikutus, EN 1993-1-1

- Tarkastellaan M+N –yhteisvaikutusta plastisuusteorian mukaan.
- Taivutusmomentin kestävyyttä pienennetään normaalivoiman vaikutuksesta: kestävyys $M_{N,Rd}$.
 - Kysymys:
Miten min-operaattori hoidetaan?
 - Vastaus:
Kirjoitetaan kaksi rajoitusehtoa!

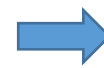
NORMAALIVOIMA JA TAIVUTUSMOMENTTI,
PLASTISUUSTEORIA:

$$M_{Ed} \leq M_{N,Rd}$$

I- ja H-profiilit:

$$M_{N,Rd} = \min \left\{ M_{pl,Rd}, M_{pl,Rd} \frac{1-n}{1-0.5a} \right\}$$

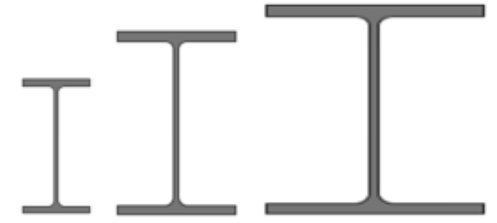
$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \quad a = \min \left\{ \frac{A-2bt_f}{A}, 0.5 \right\}$$



$$\begin{aligned} M_{Ed} &\leq M_{pl,Rd} \\ M_{Ed} &\leq M_{pl,Rd} \frac{1-n}{1-0.5a} \end{aligned}$$



RAJOITUSEHDOT: *poikkileikkauskestävyys*



Rasitusten yhteisvaikutus, EN 1993-1-1

$$M_{Ed} \leq M_{pl,Rd}$$

$$M_{Ed} \leq M_{pl,Rd} \frac{1 - n}{1 - 0.5a}$$

Kirjoitetaan normaalivoima näkyviin rajoitusehtoon



$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + (1 - 0.5a) \frac{M_{Ed}}{M_{pl,Rd}} \leq 1$$

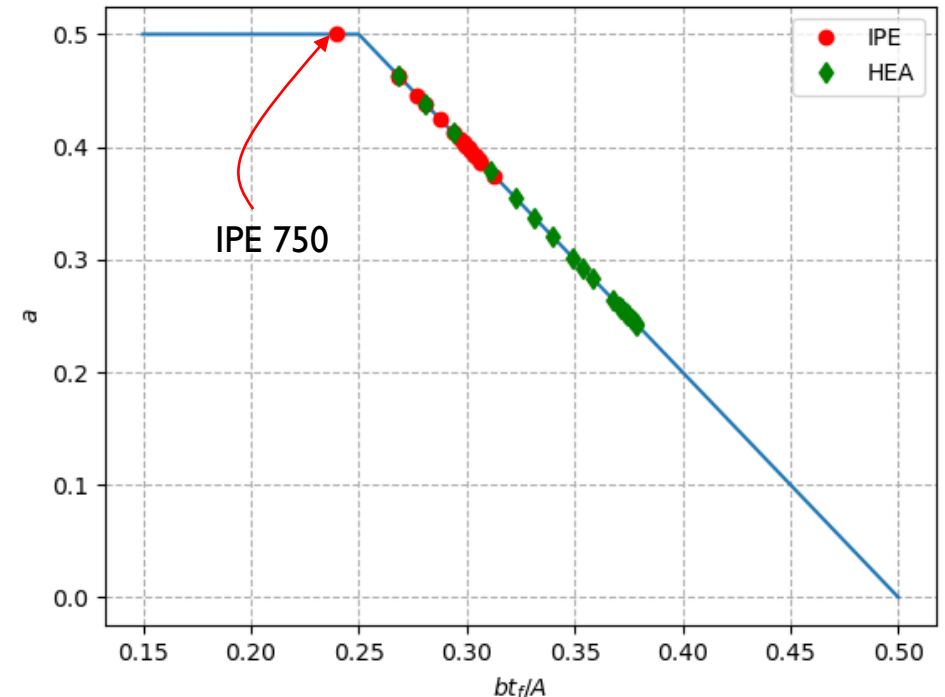
Otetaan rasitusten etumerkit huomioon



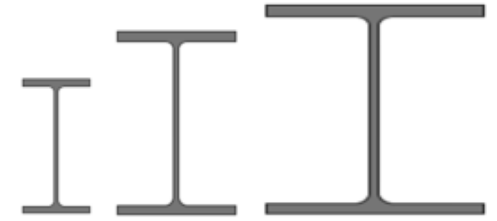
$$-1 \leq \frac{N_i}{N_{i,Rd}(\mathbf{x})} + (1 - 0.5a(\mathbf{x})) \frac{M_i}{M_{i,Rd}(\mathbf{x})} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{N_i}{N_{i,Rd}(\mathbf{x})} - (1 - 0.5a(\mathbf{x})) \frac{M_i}{M_{i,Rd}(\mathbf{x})} \leq 1$$

Termi $a = \min \left\{ \frac{A - 2bt_f}{A}, 0.5 \right\}$



RAJOITUSEHDOT: *poikkileikkauskestävyys*



Rasitusten yhteisvaikutus, EN 1993-1-1

- Standardeissa on usein annettu ehtoja mitoituskaavojen voimassaololle.
 - Nämä ovat optimoinnin kannalta erittäin hankalia.
- Mahdollisia tapoja hoitaa ehdollisuudet:
 - i. Ei välitetä niistä.
 - ii. Lisätään tehtävään rajoitusehdot, jotka pakottavat ratkaisun jollekin puolelle ehtoa.
 - iii. Käytetään binäärimuuttujia, jotka määräävät, onko ehto voimassa vai ei.
 - iv. Kirjoitetaan tehtävään rajoitusehtoja, joilla approksimoidaan ko. mitoituskaavojen kokonaistoimintaa.

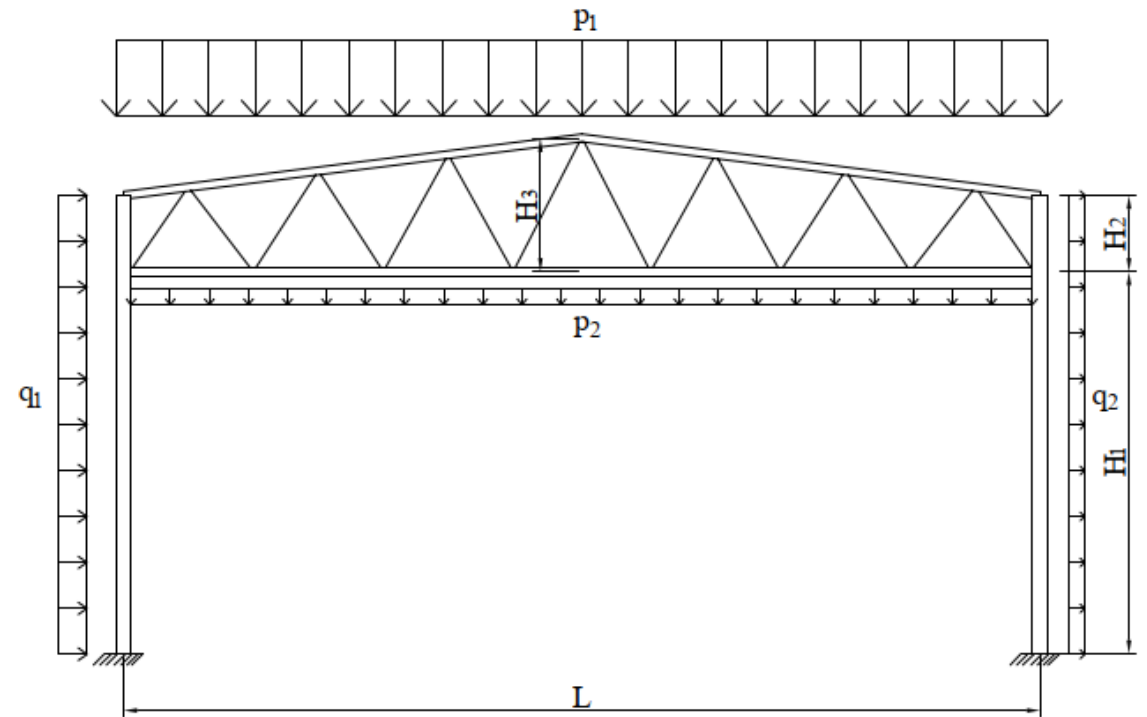
Esimerkki:

M+N -yhteisvaikutusta ei tarvitse ottaa huomioon, jos:

$$N_{Ed} \leq 0.25 N_{Rd}$$
$$N_{Ed} \leq \frac{0.5 h_w t_w f_y}{\gamma_{M0}}$$

RAJOITUSEHDOT: *sauvojen stabiilisuus*

- Stabiilisuusehtoja kirjoitetaan yleensä yksi per sauva per kuormitusyhdistely.
 - Etukäteen voidaan yrittää tunnistaa sauvoja, joita tietyt stabiilisuusilmiöt eivät koske.
- Stabiilisuuden mitoituskaavat ovat yleensä mutkikkaita.
 - Tarvitaan kimmoteorian mukainen kriittinen voima/momentti.
 - Voidaan tarvita taivutusmomentin jakautumaa sauvassa.



Kuva: Helminen (2017)

RAJOITUSEHDOT: SAUVOJEN STABIILISUUS

Puristustaivutus, EN 1993-1-1, tasotapaus

- Tarvitaan rasiusten itseisarvoltaan suurimmat arvot.
- Tarvitaan nurjahduksen pienennystekijät χ_y, χ_z .
- Erityisen hankalia termejä:
 - Yhteisvaikutustekijät k_{yy} ja k_{zy}
 - Kiepahduksen pienennyskerroin χ_{LT} .

Terässauvan puristustaivutus tasossa:


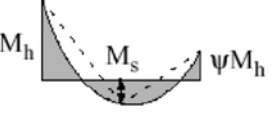
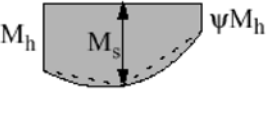
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} \leq 1$$
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} \leq 1$$

Poikkileikkausluokat 1 ja 2:

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + \min\{\bar{\lambda}_y - 0.2, 0.8\} \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$$


RAJOITUSEHDOT: *sauvojen stabiilisuus*


Puristustaivutus, EN 1993-1-1, tasotapaus

Momenttipinta	Alue		C_{my} ja C_{mz} ja C_{mLT}	
			Tasan jakaantunut kuormitus	Pistemäinen kuormitus
 ψM	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 $\alpha_s = M_s / M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
$-1 \leq \psi < 0$		$0,1(1-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	
 $\alpha_h = M_h / M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h(1+2\psi)^1$

Sivusiirtyvien kehiin sauvoille ekvivalentin momentin kertoimiksi valitaan arvot $C_{my} = 0,9$ tai $C_{Mz} = 0,9$

Poikkileikkausluokat 1 ja 2:

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + \min\{\bar{\lambda}_y - 0.2, 0.8\} \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$$


Ekvivalentin momentin kerroin C_{my} riippuu momenttikuvion muodosta. 

- Momenttikuvion muotoa on vaikea seurata optimoinnissa.

RAJOITUSEHDOT: *sauvojen stabiilisuus*

Puristustaivutus, EN 1993-1-1, tasotapaus

$$\chi_{LT} = \min \left\{ \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}, 1.0 \right\}$$

$$\Phi_{LT} = 0.5 \left(1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}$$

Poikkileikkausluokat 1 ja 2:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} \leq 1$$

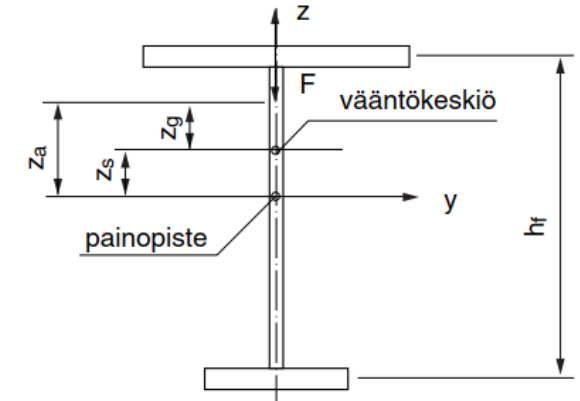
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} \leq 1$$

Kiepahduksen pienennyskerrointa varten tarvitaan kriittinen momentti, M_{cr} .

RAJOITUSEHDOT: *sauvojen stabiilisuus*

Kiepahdus: kriittinen momentti

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left(\sqrt{\left(\frac{k_z}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right)$$



- Kriittinen momentti riippuu sauvan tuennasta, kuormituksen sijainnista suhteessa vääntökeskiöön ja taivutusmomenttikuvion muodosta.
- Yleisessä tapauksessa vakioiden C_1 , C_2 ja C_3 arvot on hankala määrittää. 😞

Kuormitus ja tukiehdot	Taivutusmomenttipinnan muoto	k	Tekijöiden arvot		
			C_1	C_2	C_3
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050

Ongelin & Valkonen (2010)

RAJOITUSEHDOT: *sauvojen stabiilisuus*

- *yhteenveto*

- Stabiilisuusilmiöiden kirjoittaminen siisteiksi matemaattisiksi lausekkeiksi on erittäin hankalaa (*suht' mahotonta*).
 - Rajoitusehdot voidaan kuitenkin evaluoida optimoinnissa, vaikka kestävyudet olisivatkin mutkikkaiden lausekkeiden takana.
- Monet lausekkeissa esiintyvät termit saadaan määritettyä rasiusten avulla.
 - Voidaan kuitenkin tarvita lisätietoja/oletuksia, vrt. kuormituksen sijainti kiepahdustarkasteluissa.
- Miten toimitaan optimoinnissa?
 - a) Tehdään varmalla puolella olevia yksinkertaistuksia: esim. $C_{my} = 1.0$ (tai 0.9)
 - b) Käytetään erillistä ohjelmaa, joka laskee annetuilla lähtötiedoilla tarvittavat suureet.

EUROKOODIT JA OPTIMOINTI

yhteenveto 1/2

- Optimoinnissa eurokoodien mitoituskaavoja käsitellään matemaattisina funktioina, jotka riippuvat suunnittelumuuttujien arvoista.
- Monille optimointimenetelmille tehtävän funktioiden jatkuvuus ja derivoituvuus ovat perusedellytyksiä.
 - Epäjatkuvuudet ja ehdolliset lausekkeet standardeissa ovat hankalia.
- On myös olemassa optimointimenetelmiä, jotka eivät välitä funktioiden matemaattisesta muodosta.
 - Metaheuristiset menetelmät: evoluutioalgoritmit, geneettiset algoritmit, parveilualgoritmit, jne.
 - Usein nämä menetelmät eivät ole niin tehokkaita kuin sellaiset, jotka hyödyntävät tehtävän matemaattista struktuuria.

EUROKOODIT JA OPTIMOINTI

yhteenvedo 2/2

- Normeja laadittaessa olisi hyvä välttää lausekkeitä, joissa arvoja luetaan taulukoista ja käyristä. Myös erilaiset ehdollisuudet tulisi minimoida.
 - Siirtymät ehdollisten alueiden välillä pitäisi tehdä sileästi.
 - Myös rasituskuvioiden muodosta riippuvat lausekkeet ovat hankalia optimoinnissa.
- Optimoinnissa erilaiset ”rajatapaukset” aktivoituvat herkästi.
 - Liikutaan kaavojen pätevyysalueiden rajoilla (vrt. terässauvoilla poikkileikkausluokat 2 ja 3)
- Nykyisellään Eurokoodit soveltuvat melko hyvin optimointiin. Monet mitoitus ehdot ovat valmiiksi sopivassa muodossa.
 - Tehtävänasettelujen laatimisessa on kertaalleen katsottava mitoituskaavat läpi ja mietittävä, onko erilaisiin tilanteisiin tehtävä lisätoimenpiteitä.